THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

LUNDI 2 JUILLET 1979

Temps: 4 heures.

(1) Soient p et q des entiers strictement positifs vérifiant :

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Montrer que 1979 divise p.

(2) On se donne un prisme dont les deux bases $A_1A_2A_3A_4A_5$ et $B_1B_2B_3B_4B_5$ sont des pentagones. Chaque côté de ces deux bases ainsi que chaque segment A_iB_j, pour i et j vérifiant $1 \leqslant i \leqslant 5$ et $1 \leqslant j \leqslant 5$, est coloré soit en rouge soit en vert.
On suppose que tout triangle dont les trois sommets sont des sommets du prisme et dont les trois côtés sont colorés, a deux côtés de couleurs differentes.
Montrer que les dix côtés des deux bases de ce prisme sont tous de la même couleur.

(3) Dans un plan on se donne deux cercles sécants C_1 et C_2 ; A est un de leurs points communs. Les points M_1 et M_2 parcourent respectivement, dans le même sens, les cercles C_1 et C_2, chacun avec une vitesse constante. A chaque tour les points M_1 et M_2 passent simultanément au point A.
Montrer qu'il existe un point fixe du plan qui est constamment équidistant de M_1 et M_2.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

MARDI 3 JUILLET 1979

Temps : 4 heures.

(4) On se donne un plan π , un point P appartenant a π et un point Q n'appartenant pas a π.
Trouver tous les points R du plan π tels que le quotient $(QP + PR)/QR$ soit maximum.

(5) Determiner toutes les valeurs du reel a pour lesquelles il existe cinq reels positifs ou nuls x_1, x_2, x_3 , x_4, x_5 verifiant les relations suivantes :

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3 .$$

(6) Soient A et E deux sommets diametralement opposes d'un octogone regulier convexe. Un pion qui peut occuper tous les huit sommets de cet octogone se deplace, a chaque coup, d'un sommet a l'un des deux sommets voisins; le pion part de A et le jeu se termine lorsqu'il atteint pour la premiere fois le point E .
On designe par a_n le nombre de "parties" distinctes de exactement n coups se terminant en E. Prouver que pour tout entier k, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1})$$

avec $x = 2 + \sqrt{2}$ $y = 2 - \sqrt{2}$.
(Une "partie" de n coups est une suite de sommets $(P_0, \ldots P_n)$ verifiant les conditions suivantes :

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$;

(ii) Pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, P_i est distinct de E;

(iii) Pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, P_i et P_{i+1} sont des sommets voisins.)