THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Luni 2 iulie 1979.

Timp 4 ore.

1. Fie p şi q numere naturale astfel încît

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{p}{q}$$

Demonstraţi că p se divide cu 1979 .

2. Se dă o prismă ce are pentagoanele $A_1A_2A_3A_4A_5$ şi $B_1B_2B_3B_4B_5$ ca bază superioară respectiv inferioară. Fiecare latură a celor două pentagoane şi fiecare din segmentele A_iB_j, pentru toţi $i,j=1,\dots,5$, este colorat in roşu sau în albastru. In fiecare triunghi ale cărui vîrfuri sînt vîrfuri ale prismei şi ale cărui laturi au fost toate colorate există două laturi de culori diferite. Demonstraţi că toate cele 10 laturi ale feţelor superioară şi inferioară au aceeaşi culoare.

3. Două cercuri din acelaş plan sînt secante. Fie A unul din punctele lor de intersecţie. Două puncte pleacă simultan din A şi se mişcă cu viteze constante, fiecare pe cîte unul din cercuri, ambele in acelaşi sens. Cele două puncte se intorc în A simultan, după un ocol. Demonstraţi că există un punct fix P in plan aşa încît, la orice moment, distanţele dela P la cele două puncte in mişcare să fie egale.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Marti 3 iulie 1979.

Timp 4 ore.

4. Fiind date un plan π, un punct P în acest plan și un punct Q în afara lui π, să se găsească toate punctele R din π pentru care raportul $\dfrac{QP+PR}{QR}$ este maxim.

5. Să se determine toate numerele reale a pentru care există numere reale nenegative x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ce satisfac relațiile

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a\,, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2\,, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3$$

6. Fie A și E două vîrfuri opuse ale unui octogon regulat. O broască începe să sară din virful A. Din orice virf al octogonului, cu excepția lui E, ea poate sări in oricare din cele două vîrfuri alăturate lui. Cind ajunge în virful E, broasca se oprește și rămîne acolo.

Fie a_n numărul de traiectorii distincte compuse din exact n salturi, ce se termină in E. Demonstrați că $a_{2n-1}=0$, $a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1})$, $n=1,2,\ldots$, unde $x=2+\sqrt{2}$ și $y=2-\sqrt{2}$.

Notă. O traiectorie compusă din exact n salturi este un șir $(P_0,\ldots,P_n)$ de vîrfuri astfel încît:

(i) $P_0=A$, $P_n=E$.

(ii) Pentru orice $i, 0\leq i\leq n-1$, P_i este diferit de E.

(iii) Pentru orice $i, 0\leq i\leq n-1$, P_i și P_{i+1} sînt alăturate.